基于相似度的直觉模糊推理反向三 I 算法的鲁棒性

井　美，惠小静，王　蓉
（延安大学数学与计算机科学学院，陕西延安 716000）

摘　要： 本文将直觉模糊集与反向三 I 算法结合起来，研究了直觉模糊推理 α－反向三 I 算法，给出了 IFMP、IFMT 问题的直觉模糊推理 α－反向三 I 算法解的表达形式和分解形式. 其次，借助双剩余，定义了直觉模糊集间的相似度，给出了直觉 Łukasiewicz 蕴涵、直觉 Gödel 蕴涵、直觉 Goguen 蕴涵、直觉 R_0 蕴涵的相似度，并分析了它们之间的关系. 最后，利用直觉模糊集上的相似度作为扰动参数，讨论了直觉模糊推理 α－反向三 I 算法的鲁棒性，特别是，针对以上四种剩余型蕴涵算子，得到了直觉模糊推理 α－反向三 I 算法的一些关于鲁棒性的结论.

关键词： 直觉模糊推理；反向三 I 算法；相似度；鲁棒性
中图分类号： O142　　**文献标识码：** A　　**文章编号：** 0372-2112（2020）02-0265-07
电子学报 URL： http://www.ejournal.org.cn　　**DOI：** 10.3969/j.issn.0372-2112.2020.02.006

Robustness of Intuitionistic Fuzzy Inference Reverse Triple I Methods Based on Similarity

JING-mei，HUI Xiao-jing，WANG-rong
（*College of Mathematics and Computer Science，Yan' an University，Yan' an，Shaanxi 716000，China*）

Abstract： We combine reverse triple I methods with intuitionistic fuzzy set，and investigate intuitionistic fuzzy inference α－ reverse triple I methods. The expression form and decomposition form of solutions of intuitionistic fuzzy inference α－ reverse triple I methods based on IFMP and IFMT problems are given. Then，similarity between intuitionistic fuzzy sets are defined by biresiduum，the similarity of intuitionistic Łukasiewicz implication，intuitionistic Gödel implication，intuitionistic Goguen implication，intuitionistic R_0 implication are provided，furthermore，their relationship are analysed. Finally，taking similarity on intuitionistic fuzzy sets as perturbation parameters，robustness of intuitionistic fuzzy inferencea－reverse triple I methods are discussed，in particular，for four kinds of residual implications，some results concerning robustness of intuitionistic fuzzy inference α－ reverse triple I methods are obtained.

Key words： intuitionistic fuzzy inference；reverse triple I methods；similarity；robustness

1　引言

众所周知，模糊推理的核心问题是模糊假言推理（FMP）问题和模糊拒取式推理（FMT）问题，具体形式如下：

FMP 问题：给定规则 $A \to B$，且输入 A^*，输出 B^*；

FMT 问题：给定规则 $A \to B$，且输入 B^*，输出 A^*.

这里的 $A, A^* \in F(X)$，$B, B^* \in F(Y)$，$F(X)$，$F(Y)$ 分别是非空集合 X, Y 上的模糊集.

针对上述问题，模糊集[1]的创始人 Zadeh 提出了的 CRI 算法[2]，它简单易行，已经广泛运用到模式识别、医疗诊断、模糊控制等领域[3,4]，但是由于它缺乏严格的逻辑基础且不具有还原性，于是，王国俊教授提出了全蕴涵三 I 算法[5]，有效地弥补了 CRI 算法的不足，并将其纳入模糊逻辑系统之中. 文献[6]从一个新的角度去讨论全蕴涵三 I 算法，并提出了反向三 I 算法.

在现有文献中，大多数学者都是在模糊集的基础上研究推理算法的，值得我们注意的是，直觉模糊集[7]作为模糊集的推广，它比模糊集能更好地反映日常事物的模糊性和不确定性，而且在信息处理过程中能有

收稿日期：2019-03-22；修回日期 2019-09-08；责任编辑：马兰英
基金项目：国家自然科学基金（No. 11471007，No. 61763045）

效的减少了模糊信息的丢失. 关于直觉模糊集的理论已经广泛应用到聚类分析、模式识别、群决策等领域[8],但是直觉模糊集在模糊推理方面却没有得以迅速地发展,主要由于直觉模糊蕴涵算子比模糊蕴涵算子复杂得多,尤其是直觉蕴涵算子的运算法则更为繁琐. 首先文献[9]对直觉三角模与直觉蕴涵算子的相关理论进行了初步研究,文献[10,11]对直觉模糊推理作了深入研究,文献[12]提出了剩余型直觉蕴涵算子,从而建立了直觉模糊集与模糊推理之间内在联系,进一步,文献[13]研究了剩余型直觉模糊推理的三 I 算法,文献[14]研究了直觉模糊推理的三 I 约束算法.

目前,将直觉模糊集与其他推理算法相结合的研究甚少,为此,本文基于直觉模糊集,研究了直觉模糊推理 $a-$反向三 I 算法,并给出了 IFMP、IFMT 问题的直觉模糊推理 $a-$反向三 I 算法解的表达形式和分解形式.

在模糊控制系统中,往往输入的微小扰动会造成推理结果有很大偏差,那么如何有效地避免和消除这种偏差? 相对于模糊推理算法,直觉模糊推理算法是否也满足鲁棒性? 考虑到以上问题,因此,本文研究了直觉模糊推理算法的鲁棒性. 扰动参数的选取是研究鲁棒性的关键. 文献[15]给出直觉模糊集间的 P-距离,定义了直觉模糊连接词的灵敏度,分析了直觉模糊推理系统的鲁棒性,文献[16]借助经典模糊集间的距离,定义了直觉模糊集间的自然距离和 Hamming 距离,研究了 Łukasiewicz 型直觉模糊推理三 I 算法的鲁棒性,文献[17]提出了直觉模糊推理 SIS 算法,并基于自然距离和平均距离研究了 Łukasiewicz 型直觉模糊推理的 SIS 算法的鲁棒性. 显然以上学者都是基于$[0,1]$上的标准度量,通过直觉模糊集间的距离来定义扰动参数,进一步研究直觉模糊推理的鲁棒性. 但是,我们知道直觉模糊推理的结果与直觉模糊连接词和蕴涵算子有很大的关系,而且双剩余是由蕴涵算子构成的,所以,借助双剩余,通过定义直觉模糊集间的相似度来作为扰动参数,对研究直觉模糊推理算法的鲁棒性具有一定的逻辑意义和实用价值.

于是,本文利用双剩余,定义了直觉模糊集间的相似度,给出了直觉 Łukasiewicz 蕴涵、直觉 Gödel 蕴涵、直觉 Goguen 蕴涵、直觉 R_0 蕴涵的相似度,进一步讨论了它们之间的关系. 最后,将直觉模糊集上的相似度作为扰动参数,研究了直觉模糊推理 $a-$反向三 I 算法的鲁棒性,并且关于以上四种剩余型蕴涵算子,获得了直觉模糊推理 $a-$反向三 I 算法的关于鲁棒性一些结论,进一步发现 IFMP、IFMT 问题的直觉模糊推理 $a-$反向三 I 算法具有相同的鲁棒性.

2 预备知识

定义 1[7] 设 X 是非空集合,则称 $A=\{<x,A_t(x),A_f(x)>|x\in X\}$ 为 X 上的直觉模糊集. 其中:$A_t(x):X\to[0,1]$,$A_f(x):X\to[0,1]$,$A_t(x)$、$A_f(x)$分别表示 X 上的隶属度函数与非隶属度函数,而且 $\forall x\in X,0\leqslant A_t(x)+A_f(x)\leqslant 1$. 特别地,$\forall x\in X,A_t(x)+A_f(x)=1$,则直觉模糊集 A 退化为模糊集.

定义 2[13] 设 X,Y 为非空集合,X,Y 上的全体直觉模糊集之集分别为 $IFS(X)$,$IFS(Y)$.

令 $IFS=\{(t,f)|t,f\in[0,1],0\leqslant t+f\leqslant 1\}$,定义 IFS 上的一个偏序关系$\leqslant$如下:

$\alpha,\beta\in IFS,\alpha=(a_1,a_2),\beta=(b_1,b_2),\alpha\leqslant\beta$ 当且仅当 $a_1\leqslant b_1,a_2\geqslant b_2,\alpha\wedge\beta=(a_1\wedge b_1,a_2\vee b_2),\alpha\wedge\beta=(a_1\wedge b_1,a_2\vee b_2),\alpha'=(a_2,a_1)$,最小元 $0^*=(0,1)$,最大元 $1^*=(1,0)$,显然可知,$(IFS,\leqslant)$是完备的分配格.

在本文中,$A(x)=(A_t(x),A_f(x))$,$B(y)=(B_t(y),B_f(y))$,$A^*(x)=(A_t^*(x),A_f^*(x))$,$B^*(y)=(B_t^*(y),B_f^*(y))$,$A_{-f}(x)=1-A_f(x)$,$B_{-f}(y)=1-B_f(y)$,$A_{-f}^*(x)=1-A_f^*(x)$,$B_{-f}^*(y)=1-B_f^*(y)$,其中 $A_t(x),A_f(x),A_t^*(x),A_f^*(x)$是 X 上的模糊集,$B_t(y),B_f(y),B_t^*(y),B_f^*(y)$是 Y 上的模糊集.

定义 3[18] $\otimes$是$[0,1]$上的三角模,若二元运算$\oplus$满足:$a\oplus b=1-(1-a)\otimes(1-b)$,则$\oplus$是$[0,1]$上的三角余模,称$\oplus$为与$\otimes$对偶的三角余模. 反之,$\oplus$是$[0,1]$上的三角余模,若二元运算$\otimes$满足:$a\otimes b=1-(1-a)\oplus(1-b)$,则$\otimes$是$[0,1]$上的三角模,称$\otimes$为与$\oplus$对偶的三角模.

注 在本文中出现的运算优先如下:$\otimes,\oplus,\ominus\to,\wedge,\vee,\leftrightarrow$高于$+,-$.

定义 4[13] $\alpha,\beta\in IFS,\alpha=(a_1,a_2),\beta=(b_1,b_2)$,$\otimes$是$[0,1]$上的三角模,$\oplus$是与$\otimes$对偶的三角余模,在 IFS 上定义二元运算$\otimes_*,\oplus_*$:$\alpha\otimes_*\beta=(a_1\otimes b_1,a_2\oplus b_2)$;$\alpha\oplus_*\beta=(a_1\oplus b_1,a_2\otimes b_2)$.

定理 1[13] 设$\otimes_*$是由左连续三角模$\otimes$生成的直觉三角模,则 IFS 上存在二元运算$\to_*$使得$\alpha\otimes_*\beta\leqslant\gamma\Leftrightarrow\alpha\leqslant\beta\to_*\gamma$,并且$\beta\to_*\gamma=\vee\{\eta\in IFS|\eta\otimes_*\beta\leqslant\gamma\}$.

定理 2[13] $\alpha=(a_1,a_2),\beta=(b_1,b_2)$,$\to_*$是由 IFS 上左连续的直觉三角模$\otimes_*$生成的剩余型蕴涵算子,则下列结论成立.

(1)$\alpha\to_*\beta=((a_1\to b_1)\wedge(1-(b_2 ! \ a_2)),b_2 ! \ a_2)$.

(2)$\alpha\to_*\beta=((a_1\to b_1)\wedge((1-a_2)\to(1-b_2)),1-(1-a_2)\to(1-b_2))$.

例 1[13] $\alpha=(a_1,a_2),\beta=(b_1,b_2)$,下面是两种常见的剩余型直觉蕴涵及对应的三角模.

(1)直觉 Łukasiewicz 蕴涵及其对应的三角模:

$\alpha\otimes_{*l}\beta=((a_1+b_1-1)\vee 0,(a_2+b_2)\wedge 1))$;

$$a\to_{*_L}\beta=((1-a_1+b_1)\wedge(1-a_2+b_2)\wedge 1,$$
$$(b_2-a_2)\vee 0).$$

(2)直觉 Gödel1 蕴涵及其对应的三角模:

$a\otimes_{*_G}\beta=(a_1\wedge a_2,b_1\vee b_2)$;

$$a\to_{*_G}\beta=\begin{cases}(1,0), & a_1\leqslant b_1,b_2\leqslant a_2\\(1-b_2,b_2), & a_1\leqslant b_1,b_2>a_2\\(b_1,0), & a_1>b_1,b_2\leqslant a_2\\(b_1,b_2), & a_1>b_1,b_2>a_2\end{cases}$$

(3)直觉蕴涵 Goguen 及其对应的三角模:

$a\otimes_{*_{Go}}\beta=(a_1b_1,(a_2+b_2-a_2b_2))$;

$$a\to_{*_{Go}}\beta=\begin{cases}(1,0), & a_1\leqslant b_1,b_2\leqslant a_2\\(\frac{1-b_2}{1-a_2},\frac{b_2-a_2}{1-a_2}), & a_1\leqslant b_1,b_2>a_2\\(\frac{b_1}{a_1},0), & a_1>b_1,b_2\leqslant a_2\\(\frac{1-b_2}{1-a_2}\wedge\frac{b_1}{a_1},\frac{b_2-a_2}{1-a_2}), & a_1>b_1,b_2>a_2\end{cases}$$

(4)直觉觉模 R_o 蕴涵及其对应的三角模:

$$a\otimes_{*_{Ro}}\beta=\begin{cases}(0,1), & a_1+b_1\leqslant 1,a_2+b_2\geqslant 1\\(0,a_2\vee b_2), & a_1+b_1\leqslant 1,a_2+b_2<1\\(a_1\wedge b_1,1), & a_1+b_1>1,a_2+b_2\geqslant 1\\(a_1\wedge b_1,a_2\vee b_2), & a_1+b_1>1,a_2+b_2<1\end{cases}$$

$$a\to_{*_{Ro}}\beta=\begin{cases}(1,0), & a_1\leqslant b_1,b_2\leqslant a_2\\((1-b_2)\vee a_2,b_2\wedge(1-a_2)), & a_1\leqslant b_1,b_2>a_2\\((1-a_1)\vee b_1,0), & a_1>b_1,b_2\leqslant a_2\\(((1-a_1)\vee b_1)\wedge((1-b_2)\vee a_2),b_2\wedge(1-a_2)), & a_1>b_1,b_2>a_2\end{cases}$$

定义 5[19]　设 X 是非空集合,→是[0,1]上的正则蕴涵,$\forall a,b\in X,a\leftrightarrow b=(a\to b)\wedge(b\to a)$,则称↔为 a,b 的双剩余.

命题 1[19]　设 X 是非空集合,$\forall a,b,c,d\in[0,1]$,则:

(1)$(a\leftrightarrow b)\otimes(c\leftrightarrow d)\leqslant(a\otimes c)\leftrightarrow(b\otimes d)$.

(2)$(a\leftrightarrow b)\otimes(c\leftrightarrow d)\leqslant(a\to c)\leftrightarrow(b\to d)$.

命题 2[19]　设 X 是非空集合,$f,g:X\to[0,1]$是任意两个函数,则:

(1)$(\bigwedge_{x\in X}f(x))\leftrightarrow(\bigwedge_{x\in X}g(x))\geqslant\bigwedge_{x\in X}(f(x)\leftrightarrow g(x))$.

(2)$(\bigvee_{x\in X}f(x))\leftrightarrow(\bigvee_{x\in X}g(x))\geqslant\bigwedge_{x\in X}(f(x)\leftrightarrow g(x))$.

引理 1[19,20]　设 X 是非空集合,$a,b,c\in[0,1]$,若 $a\leqslant b\leqslant c$,则 $a\leftrightarrow c\leqslant a\leftrightarrow b,a\leftrightarrow c\leqslant b\leftrightarrow c$.

3　直觉模糊推理反向三 I 算法

IFMP 问题的直觉模糊推理 α - 反向三 I 算法的基本思想:设 $A(x),A^*(x)\in IFS(X),B(y)\in IFS(Y),\alpha\in IFS$,

$$(A^*(x)\to_* B^*(y))\to_*(A(x)\to_* B(y))\geqslant\alpha \quad (1)$$

若 $B^*(y)$是 $IFS(Y)$中对一切 $x\in X,y\in Y$ 都满足式(1)的最大直觉模糊集,则称 $B^*(y)$为 IFMP 问题的直觉模糊推理 α - 反向三 I 算法的解.

引理 2　设$\otimes_*$是 IFS 上左连续的直觉三角模,$\to_*$是与$\otimes_*$伴随的剩余型直觉蕴涵算子,而且当 $y\geqslant z$ 时,$x\otimes_* y=z\Leftrightarrow x=y\to_* z$,则$\forall\alpha,\beta\in IFS$,下列结论成立:

(1)$\alpha=\beta\to_*(\beta\otimes_*\alpha)$.

(2)$\alpha=(\alpha\to_*\beta)\to_*\beta$.

证明　(1)$\forall\gamma\in IFS,\alpha\otimes_*\beta=\gamma\Leftrightarrow\alpha=\beta\to_*\gamma$ 且 $\beta\geqslant\gamma$,则$\beta\to_*(\beta\otimes_*\alpha)=\beta\to_*(\alpha\otimes_*\beta)=\beta\to_*\gamma=\alpha$.

(2)由已知条件可知,$\alpha=(\alpha\to_*\beta)\to_*\beta\Leftrightarrow\alpha\otimes_*(\alpha\to_*\beta)=\beta\Leftrightarrow\alpha\to_*\beta=\alpha\to_*\beta$. 显然,$\alpha\to_*\beta=\alpha\to_*\beta$ 恒成立. 因此 $\alpha=\alpha\to_*(\beta\to_*\beta)$恒成立.

定理 3　设$(\otimes_*\to_*)$是 IFS 上的直觉伴随对,而且当 $y\geqslant z$ 时,$x\otimes_* y=z\Leftrightarrow x=y\to_* z$,则 IFMP 问题的直觉模糊推理 a - 反向三 I 算法的解 $B^*(y)$可表示为如下:

$$B^*(y)=\bigwedge_{x\in X}\{A^*(x)\otimes_*(\alpha\to_*(A(x)\to_* B(y)))\},y\in Y$$

证明　由 $B^*(y)$的表达式及引理 2 可知,$\forall x\in X$,$y\in Y$,

$$(A^*(x)\to_* B^*(y))\to_*(A(x)\to_* B(y))$$
$$\geqslant(A^*(x)\to_*(A^*(x)\otimes_*(\alpha\to_*(A(x)\to_* B(y)))))$$
$$\to_*(A(x)\to_* B(y))$$
$$=(\alpha\to_*(A(x)\to_* B(y)))\to_*(A(x)\to_* B(y))=\alpha\geqslant\alpha$$

从而可知 $B^*(y)$是满足式(1)的. 假设存在 $C(y)\in IFS(Y)$,使得 $C(y)$满足(1)式,则$\forall x\in X,y\in Y$,有$(A^*(x)\to_* C(y))\to_*(A(x)\to_* B(y))\geqslant\alpha$ 恒成立. 即 $C(y)\leqslant A^*(x)\otimes_*(\alpha\to_*(A(x)\to_* B(y)))$. 因此,$C(y)\leqslant B^*(y)$. 所以 $B^*(y)$为 IFMP 问题的直觉模糊推理 a - 反向三 I 算法的解.

推论 1　设$(\otimes_*\to_*)$是 IFS 上的直觉伴随对,$B^*(y)=(B_t^*(y),B_f^*(y)),\alpha=(a_1,a_2)$,则 IFMP 问题的直觉模糊推理 a - 反向三 I 算法的 $B^*(y)$可分解如下:

$$B_t^*(y)=\bigwedge_{x\in X}\{A_t^*(x)\otimes((a_1\to((A_t(x)\to B_t(y)\wedge(A_{-f}(x)\to B_{-f}(y)))\wedge(1-(1-A_{-f}(x)\to B_{-f}(y))!\ a_2)\},y\in Y.$$

$$B_f^*(y)=\bigvee_{x\in X}\{A_f^*(x)\oplus((1-A_{-f}(x)\to B_{-f}(y))!\ a_2)\},y\in Y.$$

IFMT 问题的直觉模糊推理 a - 反向三 I 算法的基

本思想：设 $A(x)\in IFS(X)$，$B(y)$，$B^*(y)\in IFS(Y)$，$\alpha\in IFS$，若 $A^*(x)$ 是 $IFS(X)$ 中对一切 $x\in X$，$y\in Y$ 都满足式(1)的最小直觉模糊集，则称 $A^*(x)$ 为 IFMT 问题的直觉模糊推理 a－反向三 I 算法的解.

定理 4　设$(\otimes_*\to_*)$是 IFS 上的直觉伴随对，而且当 $y\geq z$ 时，$x\otimes_* y=z\Leftrightarrow x=y\to_* z$，则 IFMT 问题的直觉模糊推理 a－反向三 I 算法的解 $A^*(x)$ 可表示为如下：

$$A^*(x)=\bigvee_{y\in Y}\{(\alpha\to_*(A(x)\to_* B(y)))\to_* B^*(y)\},x\in X$$

证明　由 $A^*(x)$ 的表达式及引理 2 可知，$\forall x\in X,y\in Y$，

$$(A^*(x)\to_* B^*(y))\to_*(A(x)\to_* B(y))$$
$$\geq(((\alpha\to_*(A(x)\to_* B(y)))$$
$$\to_* B^*(y))\to_* B^*(y))\to_*(A(x)\to_* B(y))$$
$$=(\alpha\to_*(A(x)\to_* B(y)))\to_*(A(x)\to_* B(y))=\alpha$$
$$\geq\alpha$$

从而可知 $A^*(x)$ 满足式(1). 假设存在 $D(x)\in IFS(X)$，使得 $D(x)$ 满足式(1)，则 $\forall x\in X,y\in Y$，有$(D(x)\to_* B^*(y))\to_*(A(x)\to_* B(y))\geq\alpha$ 恒成立. 即 $D(x)\geq(\alpha\to_*(A(x)\to_* B(y)))\to_* B^*(y)$. 因此，$A^*(x)\leq D(x)$. 所以 $A^*(x)$ 为 IFMT 问题的直觉模糊推理 a－反向三 I 算法的解.

推论 2　设$(\otimes_*,\to_*)$是 IFS 上的直觉伴随对，$A^*(x)=(A_t^*(x),A_f^*(x))$，$\alpha=(a_1,a_2)$，则 IFMT 问题的直觉模糊推理 a－反向三 I 算法的 $A^*(x)$ 可分解如下：

$$A_t^*(x)=\bigvee_{y\in Y}\{(((a_1\to((A_t(x)\to B_t(y))\wedge(A_{-f}(x)\to B_{-f}(y))))\wedge(1-(1-A_{-f}(x)\to B_{-f}(y))\ominus a_2))\to B_t^*(y))\wedge(1-(B_f^*(y)!\ ((1-A_{-t}(x)\to B^*_{-t}(y))\ominus a_2)))\},x\in X.$$

$$A_f^*(x)=\bigwedge_{y\in Y}\{B_f^*(y)?\ ((1-A_{-f}(x)\to B_{-f}(y))!\ a_2)\},\ x\in X.$$

4　直觉模糊集间的相似度

定义 6　设 X 是非空集合，$\to_*$ 是 IFS 上由左连续的直觉三角模 $\otimes_*$ 所诱导的剩余型直觉蕴涵，$\forall(a_1,a_2),(b_1,b_2)\in IFS$，$(a_1,a_2)\leftrightarrow_*(b_1,b_2)=((a_1,a_2)\to_*(b_1,b_2))\wedge((b_1,b_2)\to_*(a_1,a_2))$. 则称 $\leftrightarrow_*$ 为(a_1,a_2)，(b_1,b_2)的直觉双剩余.

引理 3　设 $\leftrightarrow_*$ 是与 $\to_*$ 相关的直觉双剩余，$\forall(a_1,a_2),(b_1,b_2),(c_1,c_2),(d_1,d_2)\in IFS$，则下面性质成立：

(1) $((a_1,a_2)\leftrightarrow_*(b_1,b_2))\otimes_*((c_1,c_2)\leftrightarrow_*(d_1,d_2))\leq((a_1,a_2)\otimes_*(c_1,c_2))\leftrightarrow_*((b_1,b_2)\otimes_*(d_1,d_2))$.

(2) $((a_1,a_2)\leftrightarrow_*(b_1,b_2))\otimes_*((c_1,c_2)\leftrightarrow_*(d_1,d_2))\leq((a_1,a_2)\to_*(c_1,c_2))\leftrightarrow_*((b_1,b_2)\to_*(d_1,d_2))$.

证明　(1)与(2)证明类似，下面只对(1)进行证明.

令 $1-a_2=a_2^-$，$1-b_2=b_2^-$，$1-c_2=c_2^-$，$1-d_2=d_2^-$，由定义 4，定理 2 及命题 1 可知：

(1) $((a_1,a_2)\leftrightarrow_*(b_1,b_2))\otimes_*((c_1,c_2)\leftrightarrow_*(d_1,d_2))$

$$=(((a_1,a_2)\to_*(b_1,b_2))\wedge((b_1,b_2)\to_*(a_1,a_2)))\otimes_*(((c_1,c_2)\to_*(d_1,d_2))\wedge((d_1,d_2)\to_*(c_1,c_2)))$$
$$=(((a_1\to b_1)\wedge(a_2^-\to b_2^-),1-a_2^-\to b_2^-)\wedge((b_1\to a_1)\wedge(b_2^-\to a_2^-),1-b_2^-\to a_2^-)\otimes_*(((c_1\to d_1)\wedge(c_2^-\to d_2^-),1-c_2^-\to d_2^-)\wedge((d_1\to c_1)\wedge(d_2^-\to c_2^-),1-d_2^-\to c_2^-))$$
$$=((a_1\to b_1)\wedge(a_2^-\to b_2^-)\wedge(b_1\to a_1)\wedge(b_2^-\to a_2^-),(1-a_2^-\to b_2^-)\vee(1-b_2^-\to a_2^-))\otimes_*((c_1\to d_1)\wedge(c_2^-\to d_2^-)\wedge(d_1\to c_1)\wedge(d_2^-\to c_2^-),(1-c_2^-\to d_2^-)\vee(1-d_2^-\to c_2^-))$$
$$=(((a_1\leftrightarrow b_1)\wedge(a_2^-\leftrightarrow b_2^-))\otimes((c_1\leftrightarrow d_1)\wedge(c_2^-\leftrightarrow d_2^-)),(1-a_2^-\leftrightarrow b_2^-)\oplus(1-c_2^-\leftrightarrow d_2^-))$$
$$\leq(((a_1\otimes c_1)\leftrightarrow(b_1\otimes d_1))\wedge(a_2^-\otimes c_2^-)\leftrightarrow(b_2^-\otimes d_2^-)),1-(a_2^-\otimes c_2^-)\leftrightarrow(b_2^-\otimes d_2^-))$$
$$=(a_1\otimes c_1,1-a_2^-\otimes c_2^-)\leftrightarrow_*(b_1\otimes d_1,1-b_2^-\otimes d_2^-)$$
$$=((a_1,a_2)\otimes_*(c_1,c_2))\leftrightarrow_*((b_1,b_2)\otimes_*(d_1,d_2))$$

引理 4　设 X 是非空集合，$\forall A(x),A'(x)\in IFS(X)$，则：

(1) $(\bigwedge_{x\in X}A(x))\leftrightarrow_*(\bigwedge_{x\in X}A'(x))\geq\bigwedge_{x\in X}(A(x)\leftrightarrow_* A'(x))$.

(2) $(\bigvee_{x\in X}A(x))\leftrightarrow_*(\bigvee_{x\in X}A'(x))\geq\bigwedge_{x\in X}(A(x)\leftrightarrow_* A'(x))$.

证明与引理 3 类似.

定义 7　设 $\to_*$ 是 IFS 上的剩余型直觉蕴涵算子，$\leftrightarrow_*$ 是与 $\to_*$ 相关的直觉双剩余，$\forall A,A'\in IFS(X)$，$S^*(A,A')=\bigwedge_{x\in X}(A(x)\leftrightarrow_* A'(x))=\bigwedge_{x\in X}((A(x)\to_* A'(x))\wedge(A'(x)\to_* A(x)))$则称 S^* 为 A,A' 的相似度.

定理 5　$\forall A,A'\in IFS(X)$，$\to_{*_1}$，$\to_{*_2}$ 是 IFS 上的任意两个剩余型直觉蕴涵算子，若 $A\to_{*_1}A'\leq A\to_{*_2}A'$，有 $A'\to_{*_1}A\leq A'\to_{*_2}A$ 恒成立，则：

(1) $S_G^*(A,A')\leq S_{Go}^*(A,A')\leq S_L^*(A,A')$.

(2) $S_G^*(A,A')\leq S_{Ro}^*(A,A')\leq S_L^*(A,A')$.

证明　(1)令 $A=(a_1,a_2)$，$A'=(b_1,b_2)\in IFS(X)$，由例 1 可知：

(ⅰ)当 $a_1\leq b_1$，$b_2\leq a_2$ 时，有 $(a_1,a_2)\to_{*_G}(b_1,b_2)=(a_1,a_2)\to_{*_{Go}}(b_1,b_2)=(a_1,a_2)\to_{*_L}(b_1,b_2)=(1,0)$.

(ⅱ)当 $a_1\leqslant b_1,b_2>a_2$ 时,$(a_1,a_2)\to_{*G}(b_1,b_2)=(1-b_2,b_2)$,$(a_1,a_2)\to_{*Go}(b_1,b_2)=(\frac{1-b_2}{1-a_2},\frac{b_2-a_2}{1-a_2})$,$(a_1,a_2)\to_{*L}(b_1,b_2)=((1-a_1+b_1)\wedge(1-a_2+b_2),b_2-a_2)$.

显然可知,

①$(1-b_2)-\frac{1-b_2}{1-a_2}=\frac{(1-b_2)(-a_2)}{1-a_2}\leqslant 0$

$\Leftrightarrow(1-b_2)\leqslant\frac{1-b_2}{1-a_2}$.

②
$$\begin{cases}\frac{1-b_2}{1-a_2}-(1-a_1+b_1)=\frac{(1-b_2)-(1-a_1+b_1)(1-a_2)}{1-a_2}\\ \leqslant\frac{(1-a_2)-(1-a_1+b_1)(1-a_2)}{1-a_2}\\ =a_1-b_1\leqslant 0\\ \frac{1-b_2}{1-a_2}-(1-a_2+b_2)=\frac{(1-b_2)-(1-a_2+b_2)(1-a_2)}{1-a_2}\\ \leqslant\frac{(1-a_2)-(1-a_2+b_2)(1-a_2)}{1-a_2}\\ =a_2-b_2\leqslant 0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow\frac{1-b_2}{1-a_2}\leqslant(1-a_1+b_1),\frac{1-b_2}{1-a_2}\leqslant(1-a_2+b_2)$

$\Leftrightarrow\frac{1-b_2}{1-a_2}=\frac{1-b_2}{1-a_2}\wedge\frac{1-b_2}{1-a_2}\leqslant(1-a_1+b_1)\wedge(1-a_2+b_2)$.

由①②可知,$1-b_2\leqslant\frac{1-b_2}{1-a_2}\leqslant(1-a_1+b_1)\wedge(1-a_2+b_2)$. 同理可知,$b_2\geqslant\frac{b_2-a_2}{1-a_2}\geqslant b_2-a_2$. 则$(a_1,a_2)\to_{*G}(b_1,b_2)\leqslant(a_1,a_2)\to_{*Go}(b_1,b_2)\leqslant(a_1,a_2)\to_{*L}(b_1,b_2)$.

当然,对于(ⅲ)当 $a_1>b_1,b_2\leqslant a_2$,(ⅳ)当 $a_1>b_1,b_2>a_2$,我们总能得到,

$(a_1,a_2)\to_{*G}(b_1,b_2)\leqslant(a_1,a_2)\to_{*Go}(b_1,b_2)\leqslant(a_1,a_2)\to_{*L}(b_1,b_2)$.

又由已知条件可知,$(b_1,b_2)\to_{*G}(a_1,a_2)\leqslant(b_1,b_2)\to_{*Go}(a_1,a_2)\leqslant(b_1,b_2)\to_{*L}(a_1,a_2)$. 则 $S_G^*(A,A')\leqslant S_{Go}^*(A,A')\leqslant S_L^*(A,A')$

(2)与(1)证明类似. 事实上,

取$(a_1,a_2)=(0.4,0.6)$,$(b_1,b_2)=(0.5,0.5)$,$S_{Go}^*(A,A')=(0.8,0)\geqslant S_{Ro}^*(A,A')=(0.5,0)$.

再取$(a_1,a_2)=(0.4,0.5)$,$(b_1,b_2)=(0.1,0.8)$,$S_{Go}^*(A,A')=(0.25,0)\leqslant S_{Ro}^*(A,A')=(0.6,0)$.

显然,$S_{Go}^*(A,A')$与 $S_{Ro}^*(A,A')$是无法比较大小的.

5　基于相似度的直觉模糊推理反向三 I 算法的鲁棒性

定义 8　设 X 是非空集合,S^* 为 A,A' 的相似度,$A,A'\in IFS(X)$,$\delta\in IFS$,$\forall x\in X$,

$$S^*(A,A')=\bigwedge_{x\in X}(A(x)\leftrightarrow_* A'(x))\geqslant\delta$$

则称 A' 与 A 的是 $\delta-$相等的,记为 $A\equiv_*(\delta)A'$. 换句话说,A' 是 A 的一个 $1^*-\delta$ 扰动.

定理 6　$B^*,B^{*\prime}$ 分别是由定理 3 给出的 IFMP(A,B,A^*)和 IFMP($A',B',A^{*\prime}$)问题的直觉模糊推理 $\alpha-$反向三 I 算法的解,$\delta_1,\delta_2,\delta_3\in IFS$,若 $A\equiv_*(\delta_1)A'$,$B\equiv_*(\delta_2)B'$,$A^*\equiv_*(\delta_3)A^{*\prime}$,则:

$$B^*\equiv_*(\delta_1\otimes_*\delta_2\otimes_*\delta_3)B^{*\prime}$$

证明　由引理 3,4 可知,

$$\begin{aligned}S^*(B^*,B^{*\prime})&=\bigwedge_{y\in Y}(B^*(y)\leftrightarrow_* B^{*\prime}(y))\\&=\bigwedge_{y\in Y}((\bigwedge_{x\in X}\{A^*(x)\otimes_*(\alpha\to_*(A(x)\to_* B(y)))\})\leftrightarrow_*(\bigwedge_{x\in X}\{A^{*\prime}(x)\otimes_*(\alpha\to_*(A'(x)\to_* B'(y)))\}))\\&\geqslant\bigwedge_{y\in Y}\bigwedge_{x\in X}((A^*(x)\otimes_*(\alpha\to_*(A(x)\to_* B(y))))\leftrightarrow_*(A^{*\prime}(x)\otimes_*(\alpha\to_*(A'(x)\to_* B'(y)))))\\&\geqslant\bigwedge_{y\in Y}\bigwedge_{x\in X}((A^*(x)\leftrightarrow_* A^{*\prime}(x))\otimes_*((\alpha\leftrightarrow_*\alpha)\otimes_*((A(x)\to_* B(y))\leftrightarrow_*(A'(x)\to_* B'(y)))))\\&\geqslant\bigwedge_{y\in Y}\bigwedge_{x\in X}((A^*(x)\leftrightarrow_* A^{*\prime}(x))\otimes_*((A(x)\leftrightarrow_* A'(x))\otimes_*(B(y)\leftrightarrow_* B'(y))))\\&\geqslant\delta_1\otimes_*\delta_2\otimes_*\delta_3\end{aligned}$$

即 $B^*\equiv_*(\delta_1\otimes_*\delta_2\otimes_*\delta_3)B^{*\prime}$

定理 7　$A^*,A^{*\prime}$ 分别是由定理 4 给出的 IFMT(A,B,B^*)和 IFMT($A',B',B^{*\prime}$)问题的直觉模糊推理 $\alpha-$反向三 I 算法的解,$\delta_1,\delta_2,\delta_3\in IFS$,若 $A\equiv_*(\delta_1)A'$,$B\equiv_*(\delta_2)B'$,$B^*\equiv_*(\delta_3)B^{*\prime}$则:

$$A^*\equiv_*(\delta_1\otimes_*\delta_2\otimes_*\delta_3)A^{*\prime}$$

证明　由引理 3,4,可知,

$$\begin{aligned}S^*(A^*,A^{*\prime})&=\bigwedge_{x\in X}(A^*(x)\leftrightarrow_* A^{*\prime}(x))\\&=\bigwedge_{x\in X}((\bigvee_{y\in Y}\{(\alpha\to_*(A(x)\to_* B(y)))\to_* B^*(y)\})\leftrightarrow_*(\bigvee_{y\in Y}\{(\alpha\to_*(A'(x)\to_* B'(y)))\to_* B^{*\prime}(y)\}))\\&\geqslant\bigwedge_{x\in X}\bigwedge_{y\in Y}(((\alpha\to_*(A(x)\to_* B(y)))\to_* B^*(y))\leftrightarrow_*((\alpha\to_*(A'(x)\to_* B'(y)))\to_* B^{*\prime}(y)))\\&\geqslant\bigwedge_{x\in X}\bigwedge_{y\in Y}((\alpha\leftrightarrow_*\alpha)\otimes_*((A(x)\to_*\end{aligned}$$

$$B(y))\leftrightarrow_*(A'(x)\rightarrow_* B'(y)))$$
$$\otimes_*(B^*(y)\leftrightarrow_* B^{*\prime}(y)))$$
$$\geq \bigwedge_{x\in X}\bigwedge_{y\in Y}((\alpha\leftrightarrow_*\alpha)\otimes_*(A(x)\leftrightarrow_*$$
$$A'(x))\otimes_*(B(y)\leftrightarrow_* B'(y))$$
$$\otimes_*(B^*(y)\leftrightarrow_* B^{*\prime}(y)))$$
$$\geq\delta_1\otimes_*\delta_2\otimes_*\delta_3$$

即 $A^*\equiv_*(\delta_1\otimes_*\delta_2\otimes_*\delta_3)A^{*\prime}$

注由定理7,8 的结论表明,IFMP、IFMT 问题的直觉模糊推理 α - 反向三 I 算法具有相同的鲁棒性.

令 $\delta_1,\delta_2,\delta_3\in IFS,\delta_i=(\delta_{it},\delta_{if}),(i=1,2,3)$,由例1,定理6 我们可以得到 IFMP 问题的基于四种常见剩余型蕴涵的直觉模糊推理 α - 反向三 I 算法的一些鲁棒性结论.

推论3 若 $\otimes_*=\otimes_{*L},\rightarrow_*=\rightarrow_{*L}$,即 $A\equiv_{*L}(\delta_1)A',B\equiv_{*L}(\delta_2)B',A^*\equiv_{*L}(\delta_3)A^{*\prime}$,则:

$$B^*\equiv_{*L}(((\delta_{1t}+\delta_{2t}+\delta_{3t}-2)\vee 0,(\delta_{1f}+\delta_{2f}+\delta_{3f})\wedge 1)B^{*\prime}$$

推论4 若 $\otimes_*=\otimes_{*G},\rightarrow_*=\rightarrow_{*G}$,即 $A\equiv_{*G}(\delta_1)A',B\equiv_{*G}(\delta_2)B',A^*\equiv_{*G}(\delta_3)A^{*\prime}$,则

$$B^*\equiv_{*G}(\delta_{1t}\wedge\delta_{2t}\wedge\delta_{3t},\delta_{1f}\vee\delta_{2f}\vee\delta_{3f})B^{*\prime}$$

推论5 若 $\otimes_*=\otimes_{*Go},\rightarrow_*=\rightarrow_{*Go}$,即 $A\equiv_{*Go}(\delta_1)A',B\equiv_{*Go}(\delta_2)B',A^*\equiv_{*Go}(\delta_3)A^{*\prime}$,则

$$B^*\equiv_{*Go}(\delta_{1t}\delta_{2t}\delta_{3t},\delta_{1f}+\delta_{2f}+\delta_{3f}-\delta_{1f}\delta_{2f}-\delta_{1f}\delta_{3f}-\delta_{2f}\delta_{3f}+\delta_{1f}\delta_{2f}\delta_{3f})B^{*\prime}$$

推论6 若 $\otimes_*=\otimes_{*Ro},\rightarrow_*=\rightarrow_{*Ro}$,即 $A\equiv_{*Ro}(\delta_1)A',B\equiv_{*Ro}(\delta_2)B',A^*\equiv_{*R^o}(\delta_3)A^{*\prime}$,则

$$B^*\equiv_{*Ro}(\delta_{1t}\otimes_{Ro}\delta_{2t}\otimes_{Ro}\delta_{3t},\delta_{1f}\oplus_{Ro}\delta_{2f}\oplus_{Ro}\delta_{3f})B^{*\prime}$$

这里的 $\otimes_{Ro},\oplus_{Ro}$ 是[0,1]上的 R_o 蕴涵算子的三角模与三角余模.

同理,由例1,定理7 我们也可以得到 IFMT 问题的基于四种常见剩余型蕴涵的直觉模糊推理 α - 反向三 I 算法的一些鲁棒性结论,且与以上推论类似.

6 结束语

本文首先基于直觉模糊集,研究了直觉模糊推理 α - 反向三 I 算法,给出了 IFMP、IFMT 问题的直觉模糊推理 α - 反向三 I 算法解的表达形式和分解形式. 其次,利用双剩余,定义了直觉模糊集上相似度,给出了直觉 Łukasiewicz 蕴涵、直觉 Gödel 蕴涵、直觉 Goguen 蕴涵、直觉 Ro 蕴涵的相似度,进一步分析了它们之间的关系. 最后,将直觉模糊集间的相似度作为扰动参数,讨论了直觉模糊推理 α - 反向三 I 算法的鲁棒性,并且针对以上四种剩余型蕴涵算子,获得了的直觉模糊推理 α - 反向三 I 算法的一些关于鲁棒性的结论,并发现 IFMP、IFMT 问题的直觉模糊推理 α - 反向三 I 算法具有相同的鲁棒性. 本文的研究结果,一方面对直觉蕴涵算子的选择有一定的指导意义,另一方面,更是为直觉模糊推理的实际应用提供了理论基础.

参考文献

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338 - 353.

[2] Zadeh L A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision and process [J]. IEEE Transaction on Systems, Man, and Cybernetics, 1973, 3 (1): 28 - 44.

[3] Dubois D, Prade H. Fuzzy Sets in approximate reasoning [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1991, 40 (1): 143 - 244.

[4] Zadeh L A. Toward extended fuzzy logic-A first step[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2009, 160(21): 3175 - 3181.

[5] Wang G J. Full implicational triple I methods for fuzzy reasoning[J]. Science in China (Series E), 1999, 29(1): 43 - 53.

[6] Song S J, Wu C. Reverse triple I method of fuzzy reasoning[J]. Science in China (Series F), 2002, 45(5): 344 - 364.

[7] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87 - 96.

[8] Liu H W, Wang G J. Multi-criteria decision-making methods based on intuitionistic fuzzy sets[J]. European Journal of Operational Research, 2007, 179(1): 220 - 233.

[9] Deschrijver G, Cornelis C, Kerre E E. On the representation of intuitionistic fuzzy t-norms and t-conorms [J]. IEEE Transaction on Fuzzy Systems, 2004, 12(1): 45 - 61.

[10] Cornelis C, Deschrijver G, Keer E E. Implication in intuitionistic fuzzy and interval-valued fuzzy set theory: construction, classsification, application[J]. Internal Journal of Approximate Reasoning, 2004, 35(1): 55 - 95.

[11] Liu H W, Wang G J. Multi-criteria decision-making methods based on intuitionistic fuzzy sets[J]. European Journal of Operational Research, 2007, 179(1): 220 - 233.

[12] 郑慕聪. 剩余型直觉蕴涵算子的统一形式[J]. 模糊系统与数学, 2013, 27(2): 15 - 22.
Zheng M C. Unified Form of Residual Intuitionistic Fuzzy Implicators[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2013, 27 (2): 15 - 22. (in Chinese)

[13] Zheng Mu cong, Shi Zhong ke, Liu Yan. Triple I methods of approximate reasoning on Atanassov's intuitionistic fuzzy sets[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2014, 55(6): 1369 - 1382.

[14] 井美, 惠小静, 王蓉. 直觉模糊推理的三 I 约束算法[J]. 计算机工程与应用, 2018, 54(15): 53 - 56.
Jing M, Hui X J, Wang R. Triple I restriction methods of

intuitionistic fuzzy inference[J]. Computer Engineering and Application,2018,54(15):53－56.(in Chinese)

[15] 于祥雨,李得超. 直觉模糊推理系统的鲁棒性[J]. 模糊系统与数学,2014,28(2):111－119.
Yu X Y,Li D C. Robustness of atanassov's intuitionistic fuzzy reasoning system[J]. Fuzzy Systems and Mathematics,2014,28(2):111－119.(in Chinese)

[16] 刘岩. 几种度量下 Łukasiewicz 型直觉模糊推理三 I 算法的性质分析[D]. 兰州理工大学,2017,1－41.
Lui Y. Property analysis of the triple I method for Łukasiewicz intuitionistic fuzzy reasoning based on several distances[D]. Lanzhou University of Technology,2017,1－41.(in Chinese)

[17] 许小芇. 直觉模糊推理 SIS 算法的统一形式及其性质研究[D]. 甘肃兰州:兰州理工大学,2017,1－41.
Xu X F. Research on the unified form and property of the SIS methods for intuitionistic fuzzy reasoning[D]. Lanzhou, Gansu: Lanzhou University of Technology, 2017,1－41.(in Chinese)

[18] Klement E P, Mesiar R, Pap E. Triangular Norms[M]. Dordrecht :Kluwer Academic Publishers. 2000. 1－387.

[19] 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理[M]. 北京:科学出版社,2008. 1－304.
XAWang G J. Non-classical Mathematical Logic and Approximate Reasoning[M]. Beijing: Science Press,2008. 1－304.(in Chinese)

[20] Turunen E. Mathematics Behind Fuzzy Logic[M]. Physica-Verlag,Wurzburg,1990. 1－201.

作者简介

井　美(通讯作者)　女,1992 年出生于陕西榆林,硕士研究生,研究方向为数理逻辑与不确定性推理.
E-mail:1296870589@qq.com

惠小静　女,1973 年出生于陕西榆林,教授、博士、硕士生导师. 研究方向为数理逻辑与不确定性推理.
E-mail:xhmxiaojing@163.com